<u>Definicija</u> (Euklidova udaljenost)

Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije tačke Dekartove ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, d_E\}$. Euklidova udaljenost d_E je data sa

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

(#) Neka je $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ Dekartova ravan i neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije proizvoljne tačke iz Dekartove ravni. Pokazati da je Euklidova udaljenost d_E

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

f-ja udaljenosti.

Rj.

Trebamo pokazati da vrijede tri osobine iz definicije f-je udaljenosti.

(i) Pokažimo da je $d_E(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^2$

$P(x_1, y_1)$
$Q(x_2, y_2)$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y_1-y_2)^2}_{\geq 0}} \geq 0 \implies d_E(P,Q) \geq 0$$

vrijedi prva osobina

(ii) Pokažimo da je $d(P,Q) = 0$ akko $P = Q$

$\Leftarrow$: $P = Q \implies x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \implies \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} = 0 \implies d_E(P,Q) = 0$

$\Rightarrow$: $d_E(P,Q) = 0 \implies \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = 0 \implies x_1 - x_2 = 0 \quad y_1 - y_2 = 0 \implies P = Q$

vrijedi druga osobina

(iii) Pokažimo da $d_E(P,Q) = d_E(Q,P)$, $\forall P,Q \in \mathbb{R}^2$

$P(x_1, y_1)$
$Q(x_2, y_2)$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{(-1)(x_2-x_1)} + \underbrace{(y_1-y_2)^2}_{=(-1)(y_2-y_1)}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = d_E(Q,P)$$

vrijedi treća osobina.

Na osnovu (i), (ii) i (iii) možemo zaključiti da je d_E f-ja udaljenosti.

Definicija (Poincaré-ova udaljenost)

Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije tačke Poincaré-ove ravni $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$. Poincaré-ova udaljenost d_H je data sa

$$d_H(P,Q) = |\ln(y_2) - \ln(y_1)| \quad \text{ako} \quad x_1 = x_2$$

$$d_H(P,Q) = \left| \ln\left(\frac{x_1 - c + r}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{x_2 - c + r}{y_2}\right) \right| \quad \text{ako } P \text{ i } Q \text{ pripadaju pravoj } {}_cL_r$$

(#) Neka je $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ Poincaré-ova ravan i neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije proizvoljne tačke iz ove ravni. Pokazati da je Poincaré-ova udaljenost d_H

$$d_H(P,Q) = \begin{cases} |\ln(y_2) - \ln(y_1)|, & \text{ako je } x_1 = x_2 \\ \left|\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)\right|, & \text{ako } P,Q \in {}_cL_r \end{cases}$$

f-ja udaljenosti.

Rj. Pokažimo da vrijede tri osobine iz definicije f-je udaljenosti.

(i) Pokažimo da $d_H(P,Q) \geq 0$ $\forall P,Q \in \mathbb{H}$ $(P(x_1,y_1),\ Q(x_2,y_2))$.

1° $x_1 = x_2$

zbog apsolutne vrijednosti

$$d_H(P,Q) = |\ln(y_2) - \ln(y_1)| = \Big|\ln\underbrace{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}_{>0}\Big| \geq 0 \Rightarrow d_H(P,Q) \geq 0$$

2° $x_1 \neq x_2$

zbog apsolutne vrijednosti

$$d_H(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{\overbrace{\frac{x_1-c+r}{y_1}}^{>0}}{\frac{x_2-c+r}{y_2}}\right)\right| \geq 0$$

$$P,Q \in {}_cL_r \Rightarrow (x_1-c)^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow y_1^2 = r^2 - (x_1-c)^2 \Rightarrow r^2 > (x_1-c)^2$$
$$(x_2-c)^2 + y_2^2 = r^2 \Rightarrow y_2^2 = r^2 - (x_2-c)^2. \Rightarrow r^2 > (x_1-c)^2$$

Ako bi bilo
$x_1 - c + r < 0$
$x_1 - c < -r$
$r > 0 \Downarrow$
$|x_1 - c| > r$

$$r^2 - (x_1-c)^2 = (r-(x_1-c))(r+(x_1-c))$$

$$r = \sqrt{(x_1-c)^2 + y_1^2}$$

Ako bi bilo da je $r \leq x_1 - c \overset{r>0}{\Rightarrow} |x_1 - c| \geq r \Rightarrow \sqrt{(x_1-c)^2} \geq r \overset{y_1>0}{\Rightarrow} \sqrt{(x_1-c)^2 + y_1^2} > r$

#kontradikcija

Prema tome $x_1 - c + r$ mora biti >0. Slično za $x_2 - c + r$.

(ii) Pokažimo da $d(P,Q)=0$ ako i samo ako $P=Q$.

1° $x_1=x_2$

$$d_H(P,Q)=0 \Leftrightarrow |\ln(y_2)-\ln(y_1)|=0 \Leftrightarrow \left|\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right|=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)=e^0 \Leftrightarrow y_1=y_2 \overset{x_1=x_2}{\Leftrightarrow} P=Q$$

2° $x_1\neq x_2$

$P,Q\in {}_cL_r$

"$\Rightarrow$" $d_H(P,Q)=0 \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)-\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)\right|=0 \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je f-ja $f: {}_cL_r\to\mathbb{R}$ dana sa $f(x,y)=\ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$ bijekcija

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \overset{f \text{ bijekcija}}{\Longrightarrow} x_1=x_2 \text{ i } y_1=y_2 \Rightarrow P=Q$$

"$\Leftarrow$" $P=Q \Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{matrix} \Rightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)$

$$\Rightarrow d_H(P,Q)=0.$$

(iii) Pokažimo da $d(P,Q)=d(Q,P)$, $\forall P,Q\in\mathbb{H}$ $(P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2))$

1° $x_1=x_2 \Rightarrow d_H(P,Q)=|\ln(y_2)-\ln(y_1)|=|(-1)(\ln(y_1)-\ln(y_2))|=$
$=|\ln(y_1)-\ln(y_2)|=d_H(Q,P).$

2° $x_1\neq x_2 \Rightarrow d_H(P,Q)=\left|\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)-\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)\right|=\left|(-1)\left(\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)-\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)\right)\right|$
$=\left|\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)-\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)\right|=d_H(P,Q).$

Poincaré-ova udaljenost jest f-ja udaljenosti.

Definicija (mjera ili koordinatni sistem)

Neka je p prava u geometriji incidencije $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$, i neka je d f-ja udaljenosti na $\mathcal{P}$. F-ju $f : p \to \mathbb{R}$ nazivamo mjera (ili koordinatni sistem) za pravu p ako

(i) je f bijekcija;

(ii) za svaki par tački $P, Q \in p$ vrijedi

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) \qquad \dots (1)$$

Jednačinu (1) nazivamo jednačina mjere, a $f(P)$ nazivamo koordinate tačke P u odnosu na f.

(#) Neka je $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ Dekartova ravan i neka je d Euklidova udaljenost. Definišimo f-ju $f: L_{2,3} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f(Q) = f((x,y)) = \sqrt{5}\, x \quad \forall Q \in L_{2,3}$$

Pokazati da je f mjera za $L_{2,3}$ i odrediti koordinate tačke $R(1,5)$ u odnosu na f.

Rj: Trebamo pokazati da je f bijekcija i da je za svake dvije tačke $P, Q \in L_{2,3}$ zadovoljena jednačina mjere.

INJEKTIVNOST $(f(P) = f(Q) \Rightarrow P = Q)$

$P(x_1, y_1),\ Q(x_2, y_2),\ f(P) = f(Q) \Rightarrow \sqrt{5}\, x_1 = \sqrt{5}\, x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{matrix} P \in L_{2,3} \Rightarrow y_1 = 2x_1 + 3 \\ Q \in L_{2,3} \Rightarrow y_2 = 2x_2 + 3 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{x_1 = x_2} y_1 = y_2 \Rightarrow P = Q$$

f-ja je injektivna

SURJEKTIVNOST $(\forall t \in \mathbb{R}\ \exists Q \in L_{2,3}\ f(Q) = t)$

$t \in \mathbb{R}$ proizvoljno, i neka je $Q\left(\frac{t}{\sqrt{5}}, \frac{2t}{\sqrt{5}} + 3\right)$. Primjetimo da je

$$\boxed{\begin{matrix} f((x,y)) = \sqrt{5}\, x = t \\ x = \frac{t}{\sqrt{5}},\quad y \in 2\frac{t}{\sqrt{5}} + 3 \end{matrix}}$$

$Q \in L_{2,3}$;

$f(Q) = \sqrt{5} \cdot \frac{t}{\sqrt{5}} = t$ f je surjektivna

JEDNAČINA MJERE $(|f(P) - f(Q)| = d(P,Q))$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \left| \begin{matrix} P, Q \in L_{2,3} \\ y_1 = 2x_1 + 3 \\ y_2 = 2x_2 + 3 \end{matrix} \right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2} =$$

$$= \sqrt{5}\, |x_1 - x_2| = |\sqrt{5}\, x_1 - \sqrt{5}\, x_2| = |f(P) - f(Q)|$$

vrijedi jednačina mjere

Koordinata tačke $R(1,5)$ u odnosu na f je $f(R) = \sqrt{5}$.

Neka je $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}\}$ Poincaré-ova ravan i neka je d Poincaré-ova udaljenost. Definišimo f-ju $g : {}_4L_9 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$g(P) = g((x,y)) = \ln\left(\frac{x+5}{y}\right) \quad \forall P \in {}_4L_9$$

Pokazati da je g mjera za pravu ${}_4L_9$ i odrediti koordinate tačke $M(5, 2\sqrt{2})$ u odnosu na g.

Rj.

Prema definiciji g je mjera akko je g bijekcija i ako za g vrijedi jednačina mjere ($|g(P) - g(Q)| = d(P,Q) \ \forall P,Q \in {}_4L_9$).

g JE INJEKCIJA

$P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2), \ P,Q \in {}_4L_9, \ g(P) = g(Q)$

$$g(P) = g(Q) \Rightarrow \ln\frac{x_1+5}{y_1} = \ln\frac{x_2+5}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1+5}{y_1} = \frac{x_2+5}{y_2} \quad ???$$

$P \in {}_4L_9 \Rightarrow (x_1-4)^2 + y_1^2 = 81$

$Q \in {}_4L_9 \Rightarrow (x_2-4)^2 + y_2^2 = 81$

Želimo pokazati da je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Vrijednost $\ln\frac{x_1+5}{y_1}$ označimo sa t. Tj. imamo da $\ln\frac{x_1+5}{y_1} = t = \ln\frac{x_2+5}{y_2}$

$$\ln\frac{x_1+5}{y_1} = t \Rightarrow \frac{x_1+5}{y_1} = e^t$$

$$e^{-t} = \frac{y_1}{x_1+5} = \frac{y_1}{x_1-4+9}\cdot\frac{x_1-4-9}{x_1-4-9} = \frac{y_1(x_1-4-9)}{\underbrace{(x_1-4)^2-81}_{=-y_1^2}} = -\frac{x_1-13}{y_1}$$

$$e^t + e^{-t} = \frac{x_1+5}{y_1} - \frac{x_1-13}{y_1} = \frac{18}{y_1} \Rightarrow y_1 = \frac{18}{e^t+e^{-t}} = 9\,\mathrm{sech}(t)$$

Kako je $\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \dfrac{\frac{x_1+5}{y_1} + \frac{x_1-13}{y_1}}{\frac{18}{y_1}} = \dfrac{2x_1-8}{18} = \dfrac{x_1-4}{9}$ to je

$$x_1 - 4 = 9\tanh(t)$$

Time smo dobili

$$x_1 = 4 + 9\tanh(t)$$

$$Y_1 = 9\,\mathrm{sech}(t)$$

Slično

$$x_2 = 4 + 9\tanh(t)$$

$$Y_2 = 9\,\mathrm{sech}(t)$$

$\Rightarrow P = Q$ $\quad g$ je injektivna f-ja

g JE SURJEKCIJA

Izaberimo proizvoljno $t \in \mathbb{R}$ i posmatrajmo tačku $P(4+9\tanh(t), 9\,\mathrm{sech}(t))$.
Pokažimo da je $P \in {}_4L_9$ i da je $g(P) = t$

$$P(\overset{x}{4+9\tanh(t)}, \overset{Y}{9\,\mathrm{sech}(t)})$$

$$(x-4)^2 + Y^2 = (4 + 9\tanh(t) - 4)^2 + (9\,\mathrm{sech}(t))^2 = 81\underbrace{(\tanh^2(t) + \mathrm{sech}^2(t))}_{=1}$$

$$= 9^2 \quad \Rightarrow \quad P \in {}_4L_9$$

$$g(P) = \ln\frac{4 + 9\tanh(t) + 5}{9\,\mathrm{sech}(t)} = \ln\frac{\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + 1}{\frac{1}{\cosh(t)}} = \ln(\sinh(t) + \cosh(t))$$

$$= \ln\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \ln e^t = t$$

g je surjekcija

g ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$d(P,Q) = \left|\ln\frac{x_1+5}{Y_1} - \ln\frac{x_2+5}{Y_1}\right| = |g(P) - g(Q)|$$ vrijedi jednačina mjere

Time smo pokazali da je g mjera. Odredimo još koordinate tačke $M(5, 2\sqrt{2})$ u odnosu na g.

$$g(M) = \ln\frac{5+5}{2\sqrt{2}} = \ln\frac{10}{2\sqrt{2}} = \ln\frac{5}{\sqrt{2}} = \ln\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Koordinata tačke M u odnosu na g je $\ln\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

(#) Neka je $\mathcal{E}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ Dekartova ravan i neka je d taxi udaljenost. Definišimo f-ju $h: L_{-2,3} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$h(R)=h((x,y))=3x \quad \forall R \in L_{-2,3}$$

Pokazati da je h mjera za pravu $L_{-2,3}$ te odrediti koordinate tačke $N(1,1)$ u odnosu na h.

Rj. Prema definiciji h je mjera za pravu akko je h bijekcija i ako za h vrijedi jednačina mjere $(|h(P)-h(Q)|=d(P,Q) \ \forall P,Q \in L_{-2,3})$

h JE INJEKCIJA

$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $P,Q \in L_{-2,3}$, $h(P)=h(Q)$

$h(P)=h(Q) \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

Kako je $P,Q \in L_{-2,3}$ to je

$$\left.\begin{array}{l} y_1=-2x_1+3 \\ y_2=-2x_2+3 \end{array}\right\} \xRightarrow{x_1=x_2} y_1=y_2$$

$\Rightarrow P=Q$

h je SURJEKCIJA

Neka je t proizvoljan realan broj. Posmatrajmo tačku $M(\frac{1}{3}t, -\frac{2}{3}t+3)$

Primjetimo da $M \in L_{-2,3}$ i da $h(M)=3\cdot\frac{1}{3}t=t$

h ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2| \overset{(*)}{=} |x_1-x_2|+2|x_1-x_2| = 3|x_1-x_2| = |3x_1-3x_2| = |h(P)-h(Q)|$$

$$\left.\begin{array}{l} P\in L_{-2,3} \Rightarrow y_1=-2x_1+3 \\ Q\in L_{-2,3} \Rightarrow y_2=-2x_2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1-y_2=-2x_1+2x_2=(-2)(x_1-x_2) \quad \ldots(*)$$

Time smo pokazali da je h mjera za pravu $L_{-2,3}$.

Kako je $h(N)=h((1,1))=3$ to je 3 koordinata tačke $N(1,1)$ u odnosu na h.

Definicija (postulat mjere, metrička geometrija)

Za geometriju incidencije $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ zajedno sa f-jom udaljenosti d kažemo da zadovoljava postulat mjere akko za svaku pravu $p \in \mathcal{L}$ postoji mjera. U ovom slučaju kažemo da je $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrička geometrija.

(#) Pokazati da je Dekartova ravan $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ zajedno sa Euklidovom udaljenošću d_E metrična geometrija.

Rj.

Neka je p neka prava. Želimo pronaći mjeru za p. Ovo ćemo uraditi podjelivši dokaz u dva slučaja.

1° Neka je p vertikalna prava L_a.

$P \in L_a \Rightarrow P(a, y)$ za neko y. Definišimo $f: p \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f(P) = f((a, y)) = y$$

Pokažimo da je f mjera.

INJEKTIVNOST

$P, Q \in L_a$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = a$ ...(1)

$f(P) = f(Q) \Rightarrow f((a, y_1)) = f((a, y_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow P = Q$

SURJEKTIVNOST

$t \in \mathbb{R} \Rightarrow P(a, t)$

$P \in L_a$ $\quad f(P) = t$ $\quad$ f-ja je surjektivna

JEDNAČINA MJERE

$P, Q \in L_a$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = \sqrt{\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\substack{=0 \\ (x_1 = a,\ x_2 = a)}} - (y_1 - y_2)^2} = d(P, Q)$$

vrijedi jednačina mjere

Time smo pokazali da svaka prava L_a ima mjeru.

2° Neka je p ne-vertikalna prava $L_{m,b}$

$P \in L_{m,n}$, $P(x, y)$ $\Rightarrow y = mx + b$

Definišimo $f: L_{m,b} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $f(P) = f((x, y)) = x\sqrt{1 + m^2}$.

Pokažimo da je f mjera.

INJEKTIVNOST

$P, Q \in L_{m,b}$

$P(x_1, y_1)$ $\Rightarrow$ $y_1 = m x_1 + b$

$Q(x_2, y_2)$ $\quad y_2 = m x_2 + b$ ...(1)

$f(P) = f(Q) \Rightarrow x_1\sqrt{1+m^2} = x_2\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ f je injektivno

SURJEKTIVNOST

$t \in \mathbb{R}$ proizvoljno i neka je $P\left(\frac{t}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mt}{\sqrt{1+m^2}} + b\right)$.

Primjetimo da je $P \in L_{m,b}$ i $f(P) = t$ $\Rightarrow$ f je surjektivno

JEDNAČINA MJERE

$P, Q \in L_{m,b}$

$P(x_1, y_1)$

$Q(x_2, y_2)$

$$|f(P) - f(Q)| = |x_1\sqrt{1+m_1^2} - x_2\sqrt{1+m_1^2}|$$
$$= \sqrt{1+m_1^2}\,|x_1 - x_2| \quad ...(1)$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (mx_1+b - (mx_2+b))^2}$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + m^2(x_1-x_2)^2}$$
$$= \sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{1+m^2}\,|x_1-x_2| \quad ...(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $|f(P) - f(Q)| = d_E(P,Q)$.

Možemo zaključiti da kako za svaku pravu $p \in \mathcal{L}_E$ postoji mjera to je Dekartova ravan metrička geometrija.

Definicija (Euklidova ravan)

Euklidova ravan je model $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$

(gdje su $\mathcal{L}_E$ skup vertikalnih L_a i ne-vertikalnih $L_{k,n}$ pravih iz Dekartove ravni, a d_E je Euklidova udaljenost)

(#) Pokazati da je Poincaré-ova ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ zajedno sa Poincaré-ovom udaljenošću d_H metrička geometrija.

Rj: Prisjetimo se: Geometrija incidencije $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ zajedno sa f-jom udaljenošću d kažemo da je metrička geometrija ako je zadovoljen postulat mjere.

Postulat mjere: Za f-ju udaljenosti d kažemo da zadovoljava postulat mjere ako svaka prava $p \in \mathcal{L}$ ima mjeru.

Prisjetimo se da smo u jednom od prethodnih zadataka već pokazali da je d_H f-ja udaljenosti, a također smo pokazali da je f-ja $f: {}_cL_r \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x,y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$ bijekcija.

Prisjetimo se: F-ja $f: p \to \mathbb{R}$ je mjera (ili koordinatni sistem) za p ako

(i) je f bijekcija

(ii) za svaki par tački P i Q na p

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q).$$

(tj. ako je zadovoljena jednačina mjere)

Pa neka je p proizvoljna prava Poincaré-ove ravni. Ono što želimo pronaći je mjera za p. Pa podjelimo dokaz na dva dijela.

1° Neka je p prava tipa I, ${}_aL$.

$P(x_1, y_1)$
$Q(x_2, y_2)$ $\quad P, Q \in {}_aL \Rightarrow P(a, y_1), Q(a, y_2)$

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je f-ja

$$g: {}_aL \to \mathbb{R}$$
$$M(a,y) \to \ln(y)$$

bijekcija.

Pokažimo još da ova f-ja zadovoljava jednačinu mjere.

$$|g(P)-g(Q)| = |\ln(y_1)-\ln(y_2)| \overset{\text{prema definiciji}}{=} d_H(P,Q)$$

vrijedi jednačina mjere

Time smo pokazali da prava $_aL$ ima mjeru tj. da d_H u ovom slučaju zadovoljava postulat mjere.

2° Neka je p prava tipa II, $_cL_r$. Pronađimo mjeru za $_cL_r$.

Posmatrajmo f-ju $f: {}_cL_r \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$$

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je ova f-ja bijekcija. Provjerimo još da li zadovoljava jednačinu mjere

$P(x_1,y_1)$
$Q(x_2,y_2)$ $\quad P,Q \in {}_cL_r$

prema definiciji

$$|f(P)-f(Q)| = \left|\ln\left(\frac{x_1-c+r}{y_1}\right)-\ln\left(\frac{x_2-c+r}{y_2}\right)\right| = d_H(P,Q)$$

vrijedi jednačina mjere

Prema tome i prava $_cL_r$ ima mjeru tj. d_H i u ovom slučaju zadovoljava postulat mjere.

Prema tome model $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H\}$ je metrička geometrija.

Oznake (Poincaré-ova ravan)

Od sad pa nadalje pod pojmom Poincaré-ova ravan i pod simbolom $\mathcal{H}$ podrazumijevamo model

$$\mathcal{H} = \{ \mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H \},$$

gdje d_H nazivamo hiperbolična udaljenost.

(#) Pokazati da je Dekartova ravan zajedno sa taxi udaljenošću metrična geometrija.

Rj.

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je taxi udaljenost $d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ f-ja udaljenosti.

Ono što još trebamo pokazati je da d_T zadovoljava postulat mjere (tj. da svaka prava iz Dekartove ravni ima mjeru).

1° Posmatrajmo pravu L_a i posmatrajmo f-ju $f: L_a \to \mathbb{R}$

$$f(P) = f((a,y)) = y \qquad \forall P \in L_a$$

f JE INJEKCIJA

$P, Q \in L_a$, $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $\quad P \in L_a \Rightarrow x_1 = a$, $\quad Q \in L_a \Rightarrow x_2 = a$ ...(1)

$f(P) = f(Q) \Rightarrow y_1 = y_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} P = Q \quad$ f je injekcija

f JE SURJEKCIJA

Neka je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj. Posmatrajmo tačku $R(a,t)$

Imamo da $R \in L_a$ i $f(R) = t \Rightarrow f$ je surjekcija

f ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$d(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \xlongequal[x_2=a]{P,Q \in L_a \Rightarrow x_1=a} |y_1 - y_2| = |f(P) - f(Q)|$$

vrijedi jednačina mjere

2° Posmatrajmo pravu $L_{m,b}$ i f-ju $g: L_{m,b} \to \mathbb{R}$

$$g(P) = g((x_1,y_1)) = (1+|m|)x_1 \qquad \forall P \in L_{m,b}$$

g JE INJEKCIJA

$P(x_1,y_1),\ Q(x_2,y_2),\quad P,Q \in L_{m,b}$

$$g(P)=g(Q) \Rightarrow (1+|m|)x_1=(1+|m|)x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} P\in L_{m,b} \Rightarrow y_1=mx_1+b \\ Q\in L_{m,b} \Rightarrow y_2=mx_2+b \end{array}\right\} \xRightarrow{x_1=x_2} P=Q$$

g je injekcija

g JE SURJEKCIJA

Neka je $t\in\mathbb{R}$ proizvoljan realan broj i posmatrajmo tačku $R\left(\frac{t}{1+|m|},\ m\frac{t}{1+|m|}+b\right)$. Jasno je da $R\in L_{m,b}$ te da

$$g(R)=(1+|m|)\frac{t}{1+|m|}=t \Rightarrow \text{g je surjekcija}$$

g ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$|g(P)-g(Q)| = |(1+|m|)x_1-(1+|m|)x_2| = \overbrace{|(1+|m|)(x_1-x_2)|}^{|x_1-x_2|+\frac{|m(x_1-x_2)|}{|m||x_1-x_2|}}$$

$$= \left| \left.\begin{array}{l} P\in L_{m,b} \Rightarrow y_1=mx_1+b \\ Q\in L_{m,b} \Rightarrow y_2=mx_2+b \end{array}\right\} \Rightarrow y_1-y_2=m(x_1-x_2) \right| =$$

$$= |x_1-x_2|+|y_1-y_2| = d_T(P,Q)$$ vrijedi jednačina mjere

Kako svaka prava iz Dekartove ravni ima mjeru i kako je d_T f-ja udaljenosti to možemo zaključiti da je model $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ metrička geometrija.

Definicija (taxi ravan)

Model $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ nazivamo taxi ravan

(gdje je $\mathcal{L}_E$ skup svih vertikalnih L_a i ne-vertikalnih $L_{k,n}$ pravih iz Dekartove ravni, a d_T je taxi udaljenost)

Sumirajmo mjere koje imamo u tri glavna modela metrične geometrije.

Model	Tip prave	Standardna mjera (koordinatni sistem) za pravu
Euklidova ravan, $\mathcal{E}$	$L_a = \{(a,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$	$f(a,y) = y$
	$L_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$	$f(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$
Poincaré-ova ravan, $\mathcal{H}$	${}_aL = \{(a,y) \in \mathbb{H} \mid y > 0\}$	$f(a,y) = \ln y$
	${}_cL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2\}$	$f(x,y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$
Taxicab ravan, $\mathcal{T}$	$L_a = \{(a,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$	$f(a,y) = y$
	$L_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$	$f(x,y) = (1+\lvert m\rvert)x$

Dogovor. U diskusijama, u nekom od gornja tri modela, koordinate tačke u odnosu na datu pravu p će uvijek označavati koordinate u odnosu na standardnu mjeru za tu pravu, kao što je dato u tabeli iznad.

U sljedećoj lekciji ćemo govoriti o nekim specijalnim mjerama za pravu. Te mjere ne smijemo mijешати sa standardnim mjerama definisanim iznad.

(#) U Euklidovoj ravni $\mathcal{E}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}, d_{\mathcal{E}}\}$

(i) Odrediti koordinate tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $x=2$;

(ii) Pronaći koordinate tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $y=-4x+11$.

Rj.

Prisjetimo se: U Euklidovoj ravni mjera za pravu L_a je $f(a,y)=y$, a za pravu $L_{m,b}$ je $f(x,y)=x\sqrt{1+m^2}$.

Vrijednost $f(M)$ nazivamo koordinate tačke M u odnosu na mjeru f.

(i)

$x=2 \Rightarrow$ mjera za pravu $x=2$ je $f(P)=f((x,y))=y$

$f(M)=3$

Koordinata tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $x=2$ je 3

(ii)

$y=-4x+1 \Rightarrow$ mjera za ovu pravu je $f(P)=f((x,y))=x\sqrt{17}$

$f(M)=2\sqrt{17}$

Koordinata tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $y=-4x+1$ je $2\sqrt{17}$.

(#) Pronaći koordinate tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $y=-4x+11$ u Taxi ravni $\mathcal{T}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$.

Rj.

Standardna mjera za pravu oblika $L_{m,n}$ u Taxi ravni je $f(x,y)=(1+|m|)x$.

Prisjetimo se da vrijednost $f(P)$ nazivamo koordinate tačke P u odnosu na mjeru f.

$y=-4x+11 \Rightarrow m=-4 \Rightarrow 1+|m|=5 \Rightarrow$ $f=5x$ je mjera za pravu $y=-4x+11$ u Taxi ravni

$f(M)=5\cdot 2=10$

Koordinata tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $y=-4x+11$ u Taxi ravni $\mathcal{T}$ je 10.

(#) Data je Poincaré-ova ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H\}$. Pronaći koordinate tačke $M(2,3)$

(i) u odnosu na pravu $(x-1)^2 + y^2 = 10$;

(ii) u odnosu na pravu $x = 2$.

Rj.

Standardna mjera za pravu oblika ${}_aL$ u Poincaré-ovoj ravni $\mathcal{H}$ je $f(a,y) = \ln y$, a pravu oblika ${}_cL_r$ je $f(x,y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$.

Vrijednost $f(M)$ nazivamo koordinata tačke M u odnosu na mjeru f.

(i)

$(x-1)^2 + y^2 = 10 \Rightarrow c = 1, \; r = \sqrt{10} \Rightarrow f(x,y) = \ln \frac{x-1+\sqrt{10}}{y}$

$f(M) = \ln \frac{2-1+\sqrt{10}}{3} = \ln \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$

Koordinata tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $(x-1)^2+y^2=10$ je $\ln \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$.

(ii)

$x = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(a,y) = \ln y$

$f(M) = \ln 3$

Koordinata tačke $M(2,3)$ u odnosu na pravu $x=2$ je $\ln 3$.

(#) Izračunati Poincaré-ovu udaljenost između

(i) tački $A(1,2)$ i $B(3,4)$;

(ii) tački $P(2,1)$ i $Q(4,3)$.

Rj. Prisjetimo se: Za $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ Poincaré-ova udaljenost je definisana sa

$$d_H(P,Q) = \begin{cases} |\ln(y_2) - \ln(y_1)|, & \text{ako je } x_1 = x_2 \\ \left|\ln\left(\frac{x_1 - c + r}{y_1}\right) - \ln\left(\frac{x_2 - c + r}{y_2}\right)\right|, & \text{ako su } P,Q \in {}_cL_r \end{cases}$$

(i) Primjetimo da bi izračunali Poincaré-ovu udaljenost moramo znati vrijednosti od c i r. Pa pronađimo pravu ${}_cL_r$ kojoj pripadaju tačke $A(1,2)$ i $B(3,4)$.

${}_cL_r: (x-c)^2 + y^2 = r^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \in {}_cL_r: (1-c)^2 + 2^2 = r^2 \\ B \in {}_cL_r: (3-c)^2 + 4^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1-c)^2 + 4 = (3-c)^2 + 16 \Rightarrow c = 5$$

$$\Downarrow$$

$$r = \sqrt{20}$$

$$d_H(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\overbrace{1-5}^{-4}+2\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\overbrace{3-5}^{-2}+2\sqrt{5}}{4}\right)\right|$$

$$= \left|\ln \frac{-2+\sqrt{5}}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}\right| = \left|\ln \frac{-4+2\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}\right|$$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_cL_r: (2-c)^2 + 1^2 = r^2 \\ Q \in {}_cL_r: (4-c)^2 + 3^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 5, \quad r = \sqrt{10}$$

$$d_H(P,Q) = \left|\ln \frac{-3+\sqrt{10}}{1} - \ln \frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right| = \left|\ln \frac{3(-3+\sqrt{10})}{-1+\sqrt{10}}\right|$$

(#) U Euklidovoj ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$ odrediti tačku P na pravoj $L_{2,-3}$ čija je koordinata -2.

Rj.
Standardna mjera za Euklidovu ravan je

$$f(a,y) = y \quad \text{za pravu } L_a$$

$$f(x,y) = x\sqrt{1+m^2} \quad \text{za pravu } L_{m,b}.$$

Data je pravа $L_{2,-3}$ $\Rightarrow$ $m = 2$ $\Rightarrow$ $f : L_{2,-3} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x\sqrt{5}$

je standardna mjera

Koordinata tačke P je -2 $\Rightarrow$ $f(P) = -2$

$$\Downarrow$$

$$x\sqrt{5} = -2 \Rightarrow x = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

$$y_1 = mx_1 + b = 2 \cdot \frac{-2\sqrt{5}}{5} - 3 = \frac{-4\sqrt{5}}{5} - \frac{15}{5} = \frac{-4\sqrt{5} - 15}{5}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5} - 3\right)$$

(#) U Taxi ravni $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$ pronaći tačku P na pravoj $L_{2,-3}$ čija je koordinata -2.

Rj.

Standardna mjera za Taxi ravan je

$$f(a,y) = y \quad \text{za pravu } L_a$$

$$f(x,y) = (1+|m|)x \quad \text{za pravu } L_{m,b}$$

Data je prava $L_{2,-3}$ $\Rightarrow$ $m = 2$ $\Rightarrow$ $f: L_{2,-3} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to 3x$

je standardna mjera

Koordinata tačke P je -2 $\Rightarrow$ $f(P) = -2$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$y = mx + b = 2 \cdot \frac{-2}{3} - 3 = -\frac{4}{3} - \frac{9}{3} = \frac{-13}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

(#) U Poincaré-ovoj ravni $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H\}$ pronaći tačku P na pravoj ${}_{-3}L_{\sqrt{7}}$ čija je koordinata $\ln 2$.

Rj.

Standardna mjera za Poincaré ravan je

$$f(a,y) = \ln y \quad \text{za pravu } {}_aL$$

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right) \quad \text{za pravu } {}_cL_r$$

Data je prava ${}_{-3}L_{\sqrt{7}} \Rightarrow$ $c=-3$, $r=\sqrt{7}$ $\Rightarrow$ $f: {}_{-3}L_{\sqrt{7}} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \ln\frac{x+3+\sqrt{7}}{y}$$

je standardna mjera

Koordinata tačke P je $\ln 2 \Rightarrow f(P) = \ln 2$

$$\ln\frac{x+3+\sqrt{7}}{y} = \ln 2$$

$$x+3+\sqrt{7} = 2y$$

$$(x+3+\sqrt{7})^2 = 4y^2$$

$P \in {}_{-3}L_{\sqrt{7}}$: $(x+3)^2 + y^2 = 7$

$$4(x+3)^2 + 4y^2 = 28$$

$$4(x+3)^2 + (x+3)^2 + 2(x+3)\sqrt{7} + 7 = 28$$

$$5(x+3)^2 + 2\sqrt{7}(x+3) - 21 = 0$$

$20 \cdot 21$
40
420

$t = x+3$

$5t^2 + 2\sqrt{7}\,t - 21 = 0$ $\quad D = 28 + 420 = 448 = 64 \cdot 7$

$$t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 8\sqrt{7}}{10} \qquad t_1 = -\sqrt{7} \qquad t_2 = \frac{6\sqrt{7}}{10} = \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

$\Rightarrow x_1 = -3-\sqrt{7} \Rightarrow y_1 = 0$ # kontra $(y>0)$

$x_2 = -3 + \frac{3\sqrt{7}}{5} \Rightarrow y_2 = \frac{4\sqrt{7}}{5}$ $\Rightarrow$ $P\left(-3+\frac{3\sqrt{7}}{5}, \frac{4\sqrt{7}}{5}\right)$

(#) U Euklidovoj ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$ definišimo novu udaljenost koristeći d_E. Tačnije, neka je

$$d^*(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,Q), & \text{ako je } d_E(P,Q) \leq 1 \\ 1, & \text{ako je } d_E(P,Q) > 1 \end{cases}$$

(i) Pokazati da je d^* f-ja udaljenosti.

(ii) Pronaći i skicirati sve tačke $P \in \mathbb{R}^2$ takve da $d^*((9,0), P) \leq 2$.

(iii) Pronaći sve tačke $P \in \mathbb{R}^2$ takve da $d^*((9,0), P) = 2$.

Rj. Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ proizvoljne dvije tačke.

(i) $d^*(P,Q) \geq 0$

1° $d_E(P,Q) \leq 1 \Rightarrow d^*(P,Q) = d_E(P,Q) \overset{d_E \text{ f-ja udalj.}}{\geq} 0$

2° $d_E(P,Q) > 1 \Rightarrow d^*(P,Q) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ vrijedi prva osobina

$d^*(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

1° $d_E(P,Q) \leq 1 \Rightarrow$

$d^*(P,Q) = 0 \Leftrightarrow d_E(P,Q) = 0 \overset{d_E \text{ f-ja udalj.}}{\Leftrightarrow} P = Q$

2° $d_E(P,Q) > 1$

Ako je $d^*(P,Q) = 0$ ovaj slučaj nije moguć zato što

$d^*(P,Q) = 0 \Rightarrow d^*(P,Q) = d_E(P,Q)$ prema definiciji d^*

$d^*(P,Q) = d^*(Q,P)$

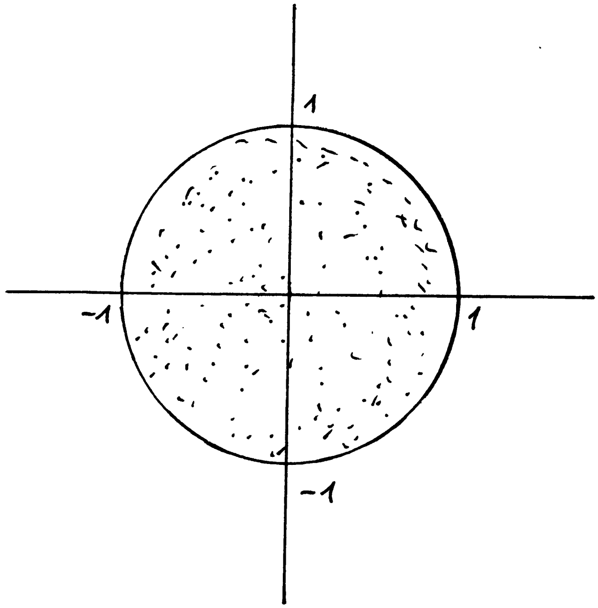
1° $d_E(P,Q) \leq 1 \Rightarrow d^*(P,Q) = d_E(P,Q) = d_E(Q,P) = d^*(Q,P)$

2° $d_E(P,Q) > 1 \Rightarrow d^*(P,Q) = 1 = d^*(Q,P)$

vrijedi treća osobina

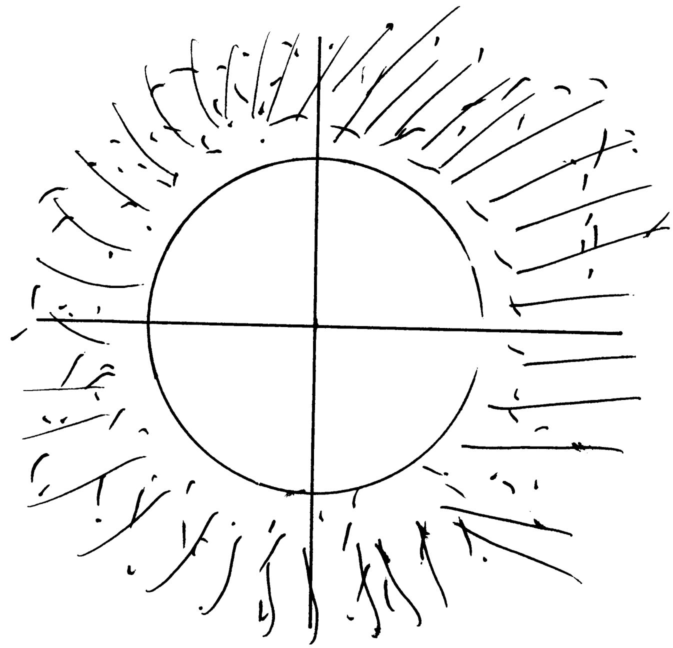
Prema tome d^* je f-ja udaljenosti.

(ii)



Posmatrajmo tačke unutar jediničnog kruga

$d_E((0,0), P) \leq 1 \Rightarrow d^*((0,0), P) \leq 1$



$d_E((0,0), P) > 1$

$\Downarrow$

$d^*((0,0), P) = 1$

Za $\forall P \in \mathbb{R}^2$ imamo da $d^*((0,0), P) < 2$

(iii) Ne postoji tačka $P \in \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi da $d^*((0,0), P) = 2$.